

Version étendue du filtre de Kalman discret appliquée à un problème inverse de conduction de chaleur non linéaire

Naouel Daouas, Mohamed-Sassi Radhouani *

Département de génie énergétique, Ecole nationale d'ingénieurs de Monastir, Route de Kairouan, 5019 Monastir, Tunisie

(Reçu le 1^{er} février 1999, accepté le 9 septembre 1999)

Résumé — Un problème inverse de conduction de la chaleur non linéaire est résolu en utilisant une formulation du filtre de Kalman basée sur une approche statistique et étendue aux systèmes non linéaires. L'évolution temporelle d'une densité de flux de chaleur surfacique a été reconstruite à partir d'une simulation numérique qui nous a permis d'étudier l'influence de certains paramètres qui conditionnent le fonctionnement du filtre sur le résultat de l'estimation. Un choix convenable de ces paramètres, guidé par l'observation du comportement du filtre, conduit à une solution qui demeure stable en présence de données bruitées mais qui est légèrement déphasée par rapport à la fonction exacte. Ce déphasage dépend notamment de la localisation de la mesure de la température interne nécessaire pour l'inversion et de l'erreur sur le modèle associée à la représentation de la densité de flux de chaleur par une fonction constante par morceaux. L'application du filtre de Kalman étendu avec des mesures de températures réelles enregistrées à partir d'un dispositif expérimental a montré que cette technique s'adapte parfaitement au caractère aléatoire des erreurs de mesure. Les résultats obtenus sont validés avec la méthode inverse de retour à la surface proposée par Raynaud et Bransier et sont en bon accord avec la densité de flux de chaleur estimée avec cette deuxième méthode. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

problème inverse non linéaire / conduction de chaleur / filtre de Kalman étendu / estimation / simulation numérique / dispositif expérimental

Abstract — An extended version of the discrete Kalman filter applied to a nonlinear inverse heat conduction problem. A nonlinear inverse heat conduction problem is resolved by using a formulation of the Kalman filter based on a statistical approach and extended to nonlinear systems. The time evolution of a surface heat flux density is reconstructed from a numerical simulation which allowed us to analyse the influence of some parameters, that condition the running of the filter, on the estimation result. A suitable choice of these parameters, guided by the filter behaviour observations, leads to a solution that remains stable when using noisy data, but that is slightly time-lagged compared to the exact function. This time-lag depends on the location of the interior temperature measurement needed for the inversion and on the model error caused by the approximation of the heat flux with a piece-wise constant function. The application of the extended Kalman filter with real measurements recorded from an experimental set-up, shows that this technique fits the stochastic structure of experimental measurements. The provided results are validated by using the Raynaud's and Bransier's inverse method and are in good agreement with the heat flux density estimated with this method. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

nonlinear inverse problem / heat conduction / extended Kalman filter / estimation / numerical simulation / experimental set-up

Nomenclature

a	diffusivité thermique	$m^2 \cdot s^{-1}$	m	nombre de mesures	
B	biais		N	nombre total de noeuds	
c_p	capacité thermique massique . .	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Q	matrice de covariance de l'erreur du modèle	
e	épaisseur du cylindre	m	q	densité de flux de chaleur	$W \cdot m^{-2}$
E	espérance mathématique		q_0	densité de flux de chaleur maximale	$W \cdot m^{-2}$
H	matrice d'observation		R	matrice de covariance du bruit de mesure	
i_m	nœud de mesure		r	bruit affectant le modèle	$W \cdot m^{-2}$
K	matrice de correction		t	temps	s
			T	température absolue	K
			W	vecteur bruit de mesure	

* Correspondance et tirés à part.

\mathbf{x}	vecteur	
\mathbf{X}	vecteur d'état augmenté	
$\hat{\mathbf{X}}$	prédiction/estimation du vecteur d'état augmenté	
y	mesure	K
\mathbf{Y}	vecteur des mesures	
z	abscisse	m
z_m	localisation du premier capteur (mesure)	m
z_l	localisation du deuxième capteur (condition-limite)	m

Symboles Grecs

ρ	masse volumique	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
λ	conductivité thermique	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
σ_m	écart type relatif au bruit de mesure	K
σ_p	écart type relatif à l'erreur d'estimation	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
σ_q	écart type relatif à l'erreur du modèle	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
Δz	pas d'espace	m
Δt	pas de temps de calcul	s
Δt_i	pas de temps inverse	s
Δt_i^*	pas de temps inverse adimensionnel	
Φ	coefficient de sensibilité	$\text{K}\cdot\text{m}^2\cdot\text{W}^{-1}$

Indices

k	instant $k\Delta t$
k/k	estimation à l'instant $k\Delta t$
$k+1/k$	prédiction à l'instant $(k+1)\Delta t$

Exposants

T	transposée d'une matrice
i	relatif au noeud i

1. INTRODUCTION

Au cours des deux dernières décennies, la méthodologie des problèmes inverses a été activement introduite dans les branches les plus développées de la technologie et de la science moderne (astronomie, médecine, nucléaire...)

La résolution de ces problèmes, rencontrés chaque fois qu'une grandeur n'est pas accessible par mesure directe, présente des applications industrielles importantes telles que le contrôle non destructif des matériaux, les opérations de coulée des métaux, les opérations d'exploration des minéraux et du pétrole...

En thermique, l'utilisation des méthodes inverses pour estimer des conditions aux limites, telles que température et flux de chaleur, ou déterminer des propriétés thermophysiques, telles que conductivité thermique, capacité thermique massique et diffusivité thermique, présente un grand intérêt. En effet, la mesure directe de ces grandeurs n'est pas toujours possible c'est le cas, par exemple, de la mesure du flux de chaleur à la surface d'une chambre de combustion ou de la température à la surface de contact entre deux corps en frottement.

Ces méthodes relient le modèle théorique à l'observation physique en exploitant les informations apportées par des mesures de températures effectuées à l'intérieur du domaine étudié et injectées dans le modèle afin de remonter à la grandeur inconnue.

Les problèmes inverses d'identification des paramètres ont fait l'objet des travaux de plusieurs auteurs tels que Huang et Yan [1] dans l'estimation simultanée de la conductivité thermique et de la capacité thermique volumique (fonctions de la température), Scarpa et Milano [2] dans la reconstruction simultanée de la conductivité thermique et de la capacité thermique massique (fonctions de la température) et Silva Neto et Özisik [3] dans le but d'identifier l'épaisseur optique, l'albédo de diffusion et la conductivité thermique d'une plaque semi-transparente. Les problèmes inverses rétrospectifs (estimation des conditions initiales) [4] et les problèmes inverses sur la géométrie [5], telle que la profondeur d'une interface ou d'un front, n'ont fait l'objet que d'un nombre limité de travaux.

Notre étude consiste à estimer l'évolution temporelle d'un flux de chaleur surfacique à partir de mesures transitoires de températures internes. Il s'agit d'un problème inverse sur une condition-limite appelé, dans le cas d'un corps opaque et immobile, problème inverse de conduction de chaleur (PICC) [5]. Ce type de problèmes a été traité en outre par Beck [6], Blanc et al. [7], Hensel et Hills [8], Scarpa et Milano [9], Dorai et Tortorelli [10] et Taler et Zima [11] qui ont adopté des méthodes de résolution différentes. La méthode proposée par Raynaud et Bransier [12] a été adaptée par Ruperti et al. [13] afin de résoudre un problème inverse de transfert de chaleur couplé conduction-rayonnement.

Ces méthodes, associant modèle et expérience, présentent des difficultés inhérentes au caractère « mal posé » [14, 16] du problème inverse qui résulte de la sensibilité de la solution inverse vis à vis des moindres perturbations affectant les données expérimentales. Afin de contourner cette difficulté, des techniques de stabilisation de la solution inverse, telles que notamment les méthodes de régu-

larisation de Tikhonov et Arsenin [14] et la technique de mollification de Murio [15], sont utilisées.

Pour réduire la sensibilité de la solution du problème inverse de conduction de chaleur aux erreurs aléatoires de mesures, Beck [6] a introduit la notion de températures futures qu'il a associée à une méthode des moindres carrés. Cette méthode a été modifiée par Blanc et al. [17] en utilisant un nombre variable de températures futures de façon à assurer l'équilibre entre la sensibilité aux erreurs de mesures et le biais introduit par la méthode. Quant à Weber [16], il a proposé de modifier la formulation de l'équation de chaleur.

Pour les problèmes inverses monodimensionnels, la faisabilité de l'estimation des grandeurs surfaciques est déterminée, d'après la référence [5], par le calcul d'un pas de temps adimensionnel, caractéristique du problème inverse, défini par : $\Delta t_i^* = a \Delta t_i / z_m^2$. La résolution de ce problème est faisable pour $\Delta t_i^* > 10^{-3}$, sinon elle devient très sensible aux perturbations affectant les données expérimentales [5].

Le filtre de Kalman discret [18, 19] constitue notre outil de base pour l'estimation du flux de chaleur surfacique. Son algorithme est tout d'abord testé sur un modèle thermique monodimensionnel non linéaire de conduction de chaleur auquel sont associées des mesures simulées de températures, afin d'étudier l'influence de certains paramètres qui conditionnent le fonctionnement du filtre sur la qualité de restitution du flux de chaleur. Cette simulation numérique vise à vérifier la faisabilité de l'inversion avant d'entamer une application expérimentale sur l'estimation de la densité de flux de chaleur absorbée à la surface d'un échantillon cylindrique et issue d'un four à image.

Les résultats de l'inversion, effectuée en utilisant le filtre de Kalman discret, sont validés à l'aide de la méthode inverse proposée par Raynaud et Bransier [5, 12] pour la résolution des problèmes inverses de conduction de chaleur. Cette méthode étant choisie pour sa simplicité, sa rapidité et son adaptation aux problèmes non linéaires. Elle est classée parmi les méthodes inverses les plus performantes [20] d'autant plus qu'on dispose aujourd'hui de critères qui facilitent la détermination de ses paramètres stabilisateurs.

2. MODELE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR

Un échantillon cylindrique de matériau homogène et isotrope initialement isotherme est soumis à l'instant

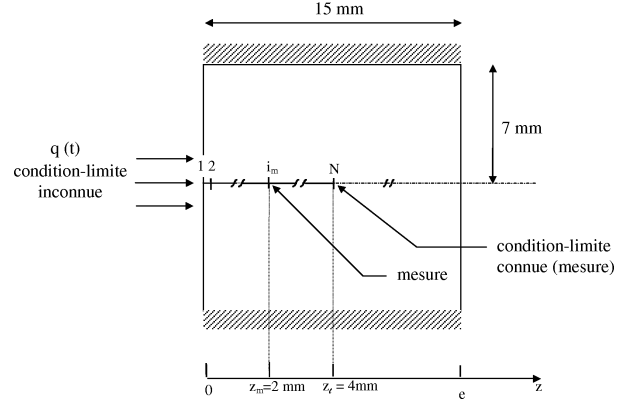


Figure 1. Description du problème inverse.

Figure 1. Description of the inverse problem.

$t = 0$ à une densité de flux de chaleur $q(t)$ supposée homogène et uniformément répartie sur la face $z = 0$ de l'échantillon (figure 1). L'objectif de notre étude est d'estimer la variation temporelle de la densité de flux de chaleur, absorbée au niveau de cette surface, au moyen d'une technique inverse.

On suppose que la surface latérale du cylindre est isolée thermiquement afin d'obtenir un champ de température monodimensionnel. Les évolutions temporelles des températures en z_m et en z_1 (figure 1) sont supposées connues (mesures transitoires de températures internes). Ignorant la condition-limite en $z = e$, notre étude est limitée à la région comprise entre $z = 0$ et $z = z_1$. Le profil de température en z_1 constitue ainsi la deuxième condition-limite du modèle. Les propriétés thermophysiques du matériau sont supposées connues :

$$\begin{aligned} \rho &= 7916,758 & (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}) \\ c_p(T) &= 0,9723T + 188,2338 & (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \\ \lambda(T) &= 0,02978T + 5,7670 & (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \\ 256 \text{ K} &< T < 417 \text{ K} \end{aligned}$$

En l'absence d'une source de chaleur interne, ce modèle thermique est régi par l'équation :

$$\rho c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (1)$$

$$T(z, 0) = T_0 \quad 0 \leq z \leq e \quad \text{condition initiale} \quad (2)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = q(t) \quad t > 0 \quad \begin{array}{l} \text{condition-limite} \\ \text{inconnue} \end{array} \quad (3)$$

$$T(z_m, t) = y^1(t) \quad t > 0 \quad \text{mesure} \quad (4)$$

$$T(z_1, t) = y^2(t) \quad t > 0 \quad \begin{array}{l} \text{condition-limite} \\ \text{connue (mesure)} \end{array} \quad (5)$$

Dans les méthodes inverses basées sur les différences finies [5], le domaine est généralement divisé en une région directe comprise entre la mesure et la condition-limite connue et une région inverse comprise entre la condition-limite inconnue et la mesure. Le problème inverse de conduction de chaleur est ainsi résolu en deux étapes. L'algorithme de Kalman, ici utilisé, traite le problème inverse comme étant un problème direct. L'approximation effectuée par Scarpa et Milano [9], qui consiste à assimiler la densité de flux de chaleur à une fonction constante par morceaux, est adoptée. Ceci revient à identifier une succession dans le temps de paramètres constants :

$$q(t) = q_k, \quad t_k < t < t_k + \Delta t \quad (6)$$

3. FILTRE DE KALMAN DISCRET

Le filtre de Kalman, basé sur la notion d'état, se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles faciles à résoudre et constitue une extension des travaux de Wiener [18, 19] aux systèmes non stationnaires. Comparé aux méthodes classiques basées sur la simple minimisation des moindres carrées d'une fonction, l'algorithme de Kalman présente plusieurs avantages. Il s'agit notamment d'une technique statistique permettant de décrire convenablement la structure aléatoire des mesures expérimentales. Par ailleurs, ce filtre fournit des informations concernant la qualité de l'estimation. En effet, sa réalisation, bien adaptée au traitement numérique, fournit en plus de l'estimation optimale, la variance de l'erreur de l'estimation. Lorsqu'il est associé à un problème de filtrage [18], le filtre de Kalman permet, grâce à sa structure récursive, son exécution en temps réel car l'instant de l'estimation de l'état correspond dans ce cas à celui de la dernière mesure. Par contre, s'il est utilisé pour la résolution d'un problème de lissage [18], le filtre de Kalman ne peut plus être exécuté en temps réel puisque l'instant de l'estimation de l'état devient inférieur à celui de la dernière mesure. Ceci correspond à l'utilisation des températures futures dans les

problèmes inverses de conduction de chaleur afin d'éviter le déphasage du signal estimé [9].

Le filtre de Kalman a été appliqué pour la première fois dans le domaine aérospatial dans la détermination des orbites, puis dans les domaines de navigation, de géologie et de météorologie. Son utilisation a été récemment étendue au domaine de transfert thermique où il a été appliqué notamment par Scarpa et al. dans la reconstruction de la diffusivité thermique (fonction de la température) [21] et dans la reconstruction d'un flux de chaleur à la limite d'un système monodimensionnel linéaire [9].

Une étude de la faisabilité de l'identification par le filtre de Kalman des conditions initiales et aux limites pour des équations paraboliques, hyperboliques et paraboliques-hyperboliques, a été présentée par Rymarz dans la référence [4]. Les performances de ce filtre ont été comparées, par Scarpa et al. [22], à celles de l'approche de Gauss à travers les résultats d'un problème de reconstruction simultanée de la conductivité thermique et de la capacité thermique massique fonctions de la température.

Les équations du modèle discret du filtre de Kalman s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_k + \mathbf{V}_k \quad (7)$$

- \mathbf{x}_k : vecteur d'état de dimension N
- \mathbf{F}_k : matrice ($N \times N$) représentant les paramètres structuraux du système
- \mathbf{U}_k : vecteur d'entrée connu de dimension N
- \mathbf{V}_k : vecteur bruit affectant le modèle de dimension N . Ce bruit est supposé blanc gaussien de moyenne nulle ($E[\mathbf{V}_k] = 0$) et de covariance $E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}$, où :

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'état initial du système \mathbf{x}_0 est mal connu, il peut être considéré comme une variable aléatoire gaussienne de moyenne $E[\mathbf{x}_0] = m_0$, de covariance $\mathbf{P}_{0/0} = E[(\mathbf{x}_0 - m_0)(\mathbf{x}_0 - m_0)^T]$ et indépendante du bruit du modèle ($E[\mathbf{V}_k \mathbf{x}_0^T] = 0$).

Le manque d'informations concernant, soit l'état initial \mathbf{x}_0 , soit certains paramètres du modèle, est compensé par des mesures de certaines composantes de l'état regroupées dans le vecteur des mesures de dimension m :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{W}_k \quad (8)$$

- \mathbf{H}_k : matrice d'observation de dimension $m \times N$
- \mathbf{W}_k : vecteur de dimension m représentant le bruit de mesure supposé blanc, gaussien, de moyenne nulle

($E[\mathbf{W}_k] = 0$), de covariance $E[\mathbf{W}_k \mathbf{W}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}$ et indépendant de l'état initial et du bruit affectant le modèle ($E[\mathbf{W}_k \mathbf{x}_0^T] = E[\mathbf{V}_k \mathbf{W}_j^T] = 0$)

Lorsque les modèles du système et des mesures sont connus et peuvent se ramener aux formes canoniques respectives (7) et (8), le filtre est en mesure d'apporter une correction à l'état propre du système au fur et à mesure de l'identification de certains paramètres inconnus, grâce à l'introduction d'un vecteur d'état augmenté

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

contenant, en plus de l'état propre \mathbf{x} du système, le vecteur \mathbf{p} des paramètres. Les vecteurs \mathbf{X} , \mathbf{U} , et \mathbf{V} et les matrices \mathbf{F} et \mathbf{Q} seront de dimensions respectives $N + p$ et $(N + p) \times (N + p)$ où p est le nombre de paramètres à identifier. La matrice d'observation \mathbf{H} sera de dimension $m \times (N + p)$.

Différentes hypothèses et démonstrations permettent d'aboutir aux équations du filtre de Kalman. Nous avons choisi la formulation, basée sur l'hypothèse gaussienne et sur la minimisation d'un critère d'écart quadratique [18], obtenue par le calcul de la moyenne conditionnelle de \mathbf{X} étant données les observations \mathbf{Y} :

$$\hat{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] \quad (9)$$

Cette formulation aboutit à une procédure récursive qui se déroule en deux étapes :

- la prédiction qui consiste à chercher une estimation a priori de l'état à l'instant $k + 1$ à partir des observations jusqu'à l'instant k :

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} = E[\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_k] \quad (10)$$

- l'estimation qui permet de corriger la valeur prédite de l'état en se basant sur la nouvelle information apportée par l'observation à l'instant $(k + 1)$:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = E[\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_{k+1}] \quad (11)$$

Les équations du filtre de Kalman s'appliquent essentiellement aux systèmes dynamiques linéaires dont le bruit de mesure est blanc. Dans le cas où le modèle et/ou l'observation ne sont pas linéaires par rapport à l'état, ils sont décrits par les équations respectives :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathcal{F}(\mathbf{X}_k, k) + \mathbf{U}_k + \mathbf{V}_k \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathcal{H}(\mathbf{X}_k, k) + \mathbf{W}_k \quad (13)$$

Ces équations sont linéarisées au premier ordre au voisinage d'un vecteur de référence choisi à partir de la

meilleure estimation disponible et on parle, dans ce cas, du filtre de Kalman étendu dont la procédure récursive se résume par les équations suivantes [18] :

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, k) + \mathbf{U}_k \quad (14)$$

(prédiction)

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (15)$$

(matrice de covariance de l'erreur de prédiction)

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \quad (16)$$

(matrice de correction)

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{Y}_{k+1} - \mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}, k + 1)] \quad (17)$$

(estimation)

$$\mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \quad (18)$$

(matrice de covariance de l'erreur d'estimation)

où :

$$\mathbf{F}_k = \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{X}_k, k)}{\partial \mathbf{X}_k} \right)_{\mathbf{X}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/k}}$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{X}_{k+1}, k + 1)}{\partial \mathbf{X}_{k+1}} \right)_{\mathbf{X}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}}$$

avec les conditions initiales :

$$\hat{\mathbf{X}}_{0/0} = E[\mathbf{X}_0] = m_0 \quad (19)$$

(estimation initiale)

$$\mathbf{P}_{0/0} = E[(\mathbf{X}_0 - m_0)(\mathbf{X}_0 - m_0)^T] \quad (20)$$

(matrice de covariance de l'erreur sur l'estimation initiale)

4. APPLICATION AU PROBLEME INVERSE DE CONDUCTION DE CHALEUR

Le domaine du modèle thermique étudié est subdivisé en un nombre fini N de volumes de contrôle dont les centres géométriques sont occupés par les noeuds d'un maillage régulier effectué avec un pas d'espace constant Δz (figure 1). A chaque noeud i , on associe une température T^i ($1 \leq i \leq N$). L'ensemble de ces températures constitue l'état propre du système auquel on associe la densité de flux de chaleur à identifier. On obtient le vecteur d'état augmenté, défini à l'instant k , par :

$$\mathbf{X}_k = (T_k^1, T_k^2, \dots, T_k^N, q_k)^T \quad (21)$$

L'hypothèse du flux de chaleur constant par morceaux (6) engendre une erreur dans le modèle qui peut être compensée, d'après [9, 18], en introduisant, dans l'équation dynamique du paramètre, un bruit r_k supposé blanc gaussien :

$$q_{k+1} = q_k + r_k \quad (22)$$

Ceci permet d'envisager une évolution dans le temps du paramètre dont l'importance dépend de la variance de r_k . Si l'on suppose que l'erreur du modèle provient uniquement de l'équation dynamique du paramètre (22), la matrice de covariance Q_k , qui caractérise le bruit de l'état s'écrit :

$$Q_k = E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T] = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E[r_k^2] \end{pmatrix}$$

Le seul élément non nul de cette matrice représente la variance σ_q^2 du bruit r_k (supposée constante). L'écart type σ_q associé à l'incertitude sur le modèle joue le rôle d'un paramètre stabilisateur qui conditionne le fonctionnement du filtre. En effet, une valeur importante de σ_q , traduit un bruit d'état important; ce qui veut dire que le filtre attache beaucoup plus d'importance aux observations qu'au modèle lui-même. Par contre, lorsque σ_q est faible, le filtre accorde une grande confiance au modèle en attachant moins d'importance aux observations; ce qui pourrait entraîner dans certains cas la divergence du filtre notamment lorsque le modèle est erroné.

La méthode des différences finies repose sur la substitution du système différentiel, formé par l'équation de diffusion de la chaleur (1), sa condition initiale (2) et ses conditions aux limites (3) et (5), par un système d'équations algébriques composé d'autant d'équations qu'il y a de nœuds. N'importe quel schéma de discrétisation de ce système différentiel peut être utilisé à condition de ramener ce dernier à la forme canonique des équations du filtre de Kalman (7), (8). Nous avons adopté un schéma explicite [23], et ceci malgré les contraintes de stabilité qu'il impose, afin d'obtenir une représentation simple de l'équation d'évolution de l'état du système qui peut être ramenée facilement à la forme de celle du filtre de Kalman. Pour la même raison, ce schéma de discrétisation a été choisi par la plupart des auteurs qui ont utilisé le filtre de Kalman discret [9, 21, 22].

En ajoutant au système d'équations algébriques obtenu l'équation dynamique du paramètre (22), on obtient l'équation d'état suivante :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathcal{F}(\mathbf{X}_k, k) + \mathbf{V}_k \quad (23)$$

où \mathcal{F} et \mathbf{V} sont des vecteurs de dimension $(N+1)$ définis par :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}_k, k) = \begin{bmatrix} \frac{2\Delta t}{\rho c_{pk}^1 \Delta z^2} [\lambda_k^{3/2} (T_k^2 - T_k^1) + q_k] + T_k^1 \\ \vdots \\ \frac{\Delta t}{\rho c_{pk}^i \Delta z^2} [\lambda_k^{i+1/2} (T_k^{i+1} - T_k^i) + \lambda_k^{i-1/2} (T_k^{i-1} - T_k^i)] + T_k^i \\ \vdots \\ y_k^2 \\ q_k \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_k \end{bmatrix}$$

La non linéarité de l'équation d'état obtenue est due à la variabilité des propriétés thermophysiques en fonction de la température. Ceci nous conduit à utiliser les équations du filtre de Kalman étendu (14)–(20).

5. RESULTATS DE LA SIMULATION NUMERIQUE

Afin de valider le modèle direct et d'examiner la faisabilité de la technique inverse, nous avons considéré un cas test d'un problème inverse de conduction de chaleur non linéaire où la densité de flux de chaleur à identifier présente une variation en fonction carrée de valeur maximale ($q_0 = 325 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$) entre les instants $t = 1 \text{ s}$ et $t = 6 \text{ s}$ et nulle ailleurs.

Les mesures de températures internes, nécessaires pour l'inversion en $z = z_m$ et utilisées comme deuxième condition-limite en $z = z_1$ (figure 1), sont bruitées en superposant aux températures exactes un bruit aléatoire d'écart type σ_m . Les températures exactes étant obtenues par la résolution du problème direct en supposant isolée la deuxième extrémité ($z = e$) de l'échantillon et en utilisant une méthode des différences finies associée à un schéma implicite [23]. Le système d'équations algébriques obtenu, est résolu à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss [23]. Les calculs directs sont

TABLEAU I / TABLE I
Variation des valeurs du biais en fonction de σ_q .
Variation of bias values with σ_q .

σ_q (kW.m ⁻²)	0,01	0,1	0,5	1	10
B	0,354	0,247	0,201	0,186	0,158

effectués avec un pas d'espace $\Delta z = 0,2$ mm et un pas de temps $\Delta t = 1$ ms. Le même pas d'espace étant utilisé pour la discrétisation de la région comprise entre $z = 0$ et $z = z_l$.

Les erreurs aléatoires affectant les mesures sont supposées additives, non corrélées, de moyenne nulle et de variance constante dans le temps. Leur distribution est supposée normale (Gaussienne) [24, 25], ce qui permet d'écrire que :

$$y = T_{\text{exacte}} + \omega \sigma_m \quad (24)$$

où ω est un nombre généré d'une façon aléatoire et compris entre $-2,576 < \omega < +2,576$ avec une probabilité de 99 %.

Pour faciliter la comparaison des résultats, la densité du flux de chaleur est représentée sous la forme adimensionnelle q/q_0 et la qualité de sa restitution est évaluée par le calcul du biais défini par [26] :

$$B = \sqrt{\frac{1}{N_p} \left[\sum_{k=1}^{N_p} (q_k - \hat{q}_k)^2 \right]} \quad (25)$$

où q est la densité de flux de chaleur adimensionnel exact, \hat{q} est la densité de flux de chaleur adimensionnel estimé et N_p est le nombre total de pas de temps. Ce biais inclut, en plus des erreurs d'estimation dues au modèle, celles dues aux perturbations affectant les mesures.

D'après la *figure 2*, on note l'influence du choix de l'écart type σ_q associé au bruit r_k affectant le modèle, sur le comportement du filtre, notamment lorsque les mesures sont entachées d'un bruit gaussien d'écart type $\sigma_m = 0,01$ K.

En diminuant la valeur de σ_q , la réponse du filtre devient de plus en plus lente entraînant ainsi un déphasage plus important de la densité de flux de chaleur estimée par rapport à la fonction exacte, ce qui se traduit par des valeurs croissantes du biais (*tableau I*). D'un autre côté, on remarque la diminution de l'effet des perturbations, dues au bruit de mesures, sur la stabilité de la solution.

En effet, en manipulant algébriquement les équations du filtre, on obtient une forme alternative de l'équation

TABLEAU II / TABLE II
Variation des valeurs du biais en fonction de la localisation de la mesure.
Variation of bias values with the measurement location.

z_m (mm)	0	1	2	3
B	0,049	0,131	0,201	0,266

du gain [19, p. 259] :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (26)$$

La diminution de l'écart type σ_q (c'est à dire de la matrice \mathbf{Q}), entraîne, d'après l'équation (15), la diminution de la matrice \mathbf{P} . Or, d'après la forme alternative (26), le gain \mathbf{K} diminue avec \mathbf{P} , ce qui conduit à une réponse plus lente du filtre. Dans ce cas, le filtre de Kalman attache moins d'importance aux observations qu'au modèle, ce qui explique la diminution de la sensibilité de la solution vis à vis des perturbations affectant les mesures. La valeur de l'écart type σ_q est ainsi choisie de façon à avoir le meilleur compromis entre stabilité et précision.

Pour le même problème d'estimation de la densité de flux de chaleur surfacique, la variation du biais en fonction du rapport σ_q/q_0 est étudiée pour différentes valeurs du pas de temps inverse. On remarque d'après la *figure 3* qu'au fur et à mesure qu'on augmente ce rapport, le biais diminue jusqu'à atteindre un minimum, puis augmente de nouveau. En effet, la diminution du biais montre que dans un premier temps, l'augmentation de σ_q entraîne une diminution du déphasage qui l'emporte sur l'augmentation des oscillations. Par contre, l'augmentation du biais après avoir atteint un minimum, s'explique par une augmentation des oscillations plus importante que la diminution du déphasage, ce qui montre de nouveau le compromis entre déphasage et oscillations. Un choix optimal de σ_q correspond à une valeur minimale du biais avec un minimum d'oscillations.

La *figure 4* montre l'influence du choix de la localisation du premier capteur (situé en z_m) sur la qualité de restitution de la densité de flux de chaleur surfacique. Les noeuds les plus éloignés de la surface exposée au flux de chaleur ne permettent pas de voir la trace de la largeur du créneau. En effet, la diffusion de l'excitation de $z = 0$ jusqu'à $z = z_m$ entraîne une perte d'information qui influe sur le résultat de l'estimation (*tableau II*).

La qualité de restitution de la densité de flux de chaleur surfacique dépend également du choix du pas de temps inverse qui correspond à l'intervalle de temps séparant deux mesures successives (*figure 5*). Ce pas de temps n'assure pas toujours la stabilité du schéma

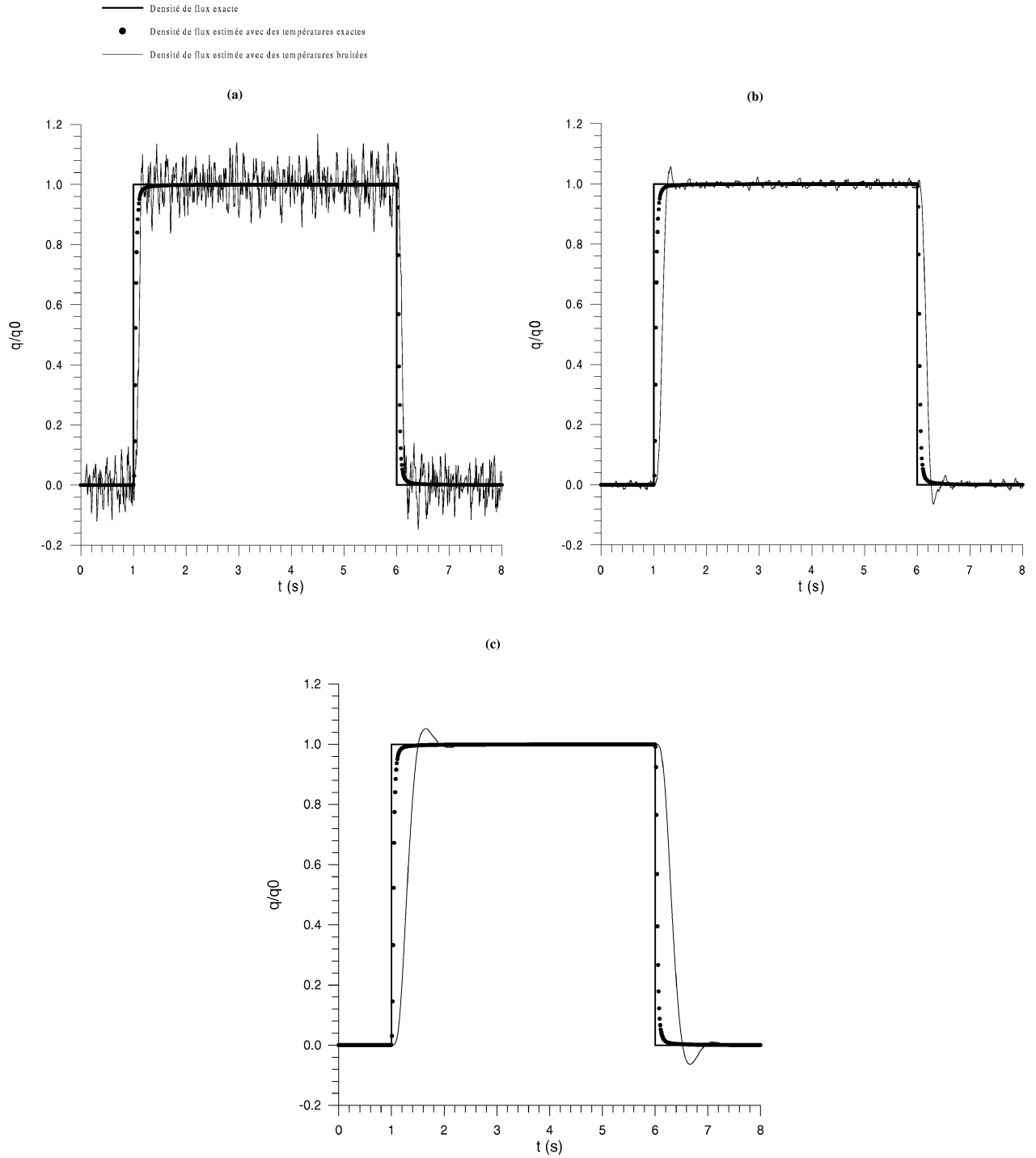


Figure 2. Influence de l'écart type σ_q sur la densité de flux de chaleur estimée avec des données exactes et avec des données bruitées. $\Delta t_i = 10 \text{ ms}$ ($\Delta t_i^* = 9,675 \cdot 10^{-3}$); $N = 21$; $i_m = 11$. (a) $\sigma_q = 10 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$; (b) $\sigma_q = 1 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$; (c) $\sigma_q = 0,1 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$.

Figure 2. Influence of the standard deviation σ_q on the estimated heat flux density using exact and noisy data. $\Delta t_i = 10 \text{ ms}$ ($\Delta t_i^* = 9,675 \cdot 10^{-3}$); $N = 21$; $i_m = 11$. (a) $\sigma_q = 10 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$; (b) $\sigma_q = 1 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$; (c) $\sigma_q = 0.1 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$.

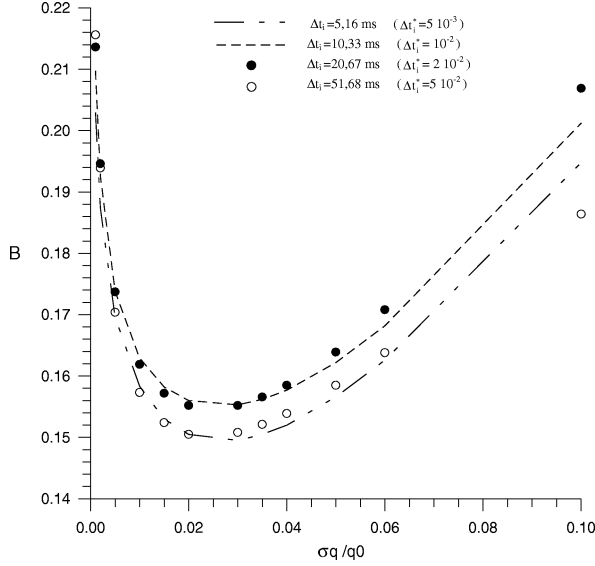


Figure 3. Variation des valeurs du biais en fonction du rapport σ_q/q_0 pour différents pas de temps inverse. $N = 21$; $i_m = 11$.

Figure 3. Variation of bias values with the ratio σ_q/q_0 for different inverse time steps. $N = 21$; $i_m = 11$.

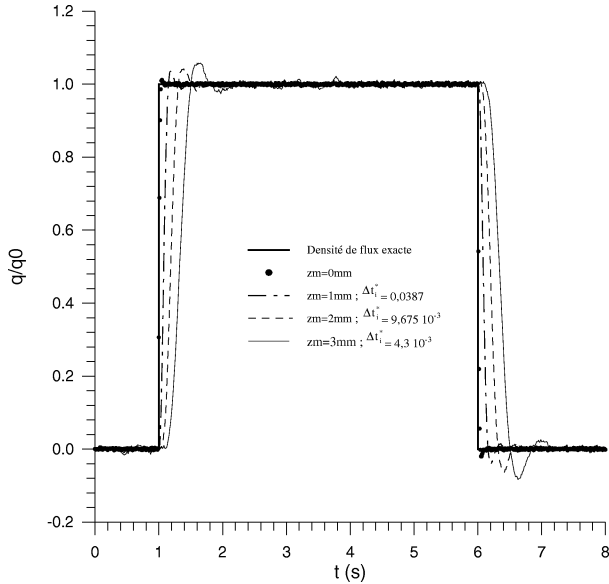


Figure 4. Influence de la localisation de la mesure de température $\sigma_m = 0,01$ K; $\sigma_q = 0,5$ kW·m⁻²; $\Delta t_i = 10$ ms; $N = 21$.

Figure 4. Influence of the temperature measurement position. $\sigma_m = 0,01$ K; $\sigma_q = 0,5$ kW·m⁻²; $\Delta t_i = 10$ ms; $N = 21$.

explicite utilisé dans les calculs de prédiction du filtre de Kalman. Dans ce cas, ces calculs sont effectués avec un pas de temps plus faible et se poursuivent jusqu'à ce qu'une mesure soit disponible.

Un pas de temps inverse relativement élevé ($\Delta t_i = 500\Delta t$) ne permet pas de représenter les variations brusques de la fonction estimée. Par contre, l'utilisation d'un pas de temps inverse réduit ($\Delta t_i = \Delta t$) entraîne une charge de calcul plus importante et s'accompagne de l'apparition de quelques oscillations dues à la sensibilité de la solution vis à vis des erreurs aléatoires des mesures.

Etant donné que les non linéarités présentes dans le modèle physique déjà considéré sont faibles, le comportement du filtre de Kalman étendu est également étudié en présence de non linéarités plus fortes en utilisant les variations suivantes des propriétés thermophysiques :

$$\begin{aligned}\lambda(T) &= 101,5267 - 1,1566T + 5,3930 \cdot 10^{-3}T^2 \\ &\quad - 1,06639 \cdot 10^{-5}T^3 + 7,744 \cdot 10^{-9}T^4 \\ c_p(T) &= 3313,77 - 37,7507T + 0,176026T^2 \\ &\quad - 3,48063 \cdot 10^{-4}T^3 + 2,52762 \cdot 10^{-7}T^4\end{aligned}$$

Lorsque l'initialisation de l'état ainsi que des matrices de covariance est suffisamment bien choisie, le filtre donne de bons résultats même en présence de fortes non linéarités (figure 6a). Une erreur sur l'état initial à laquelle on associe une matrice de covariance nulle (grande confiance accordée à cette estimation initiale), conduit à une mauvaise estimation de la densité de flux de chaleur surfacique notamment pendant les premiers instants. Cette erreur d'estimation est plus importante en présence de fortes non linéarités (figures 6b et 6c).

En effet, les équations du filtre de Kalman étendu constituent une linéarisation au premier ordre autour d'un vecteur de référence qui doit être voisin de la valeur exacte pour que la linéarisation soit valable. Le filtre de Kalman étendu [18, 19] permet de contourner cette difficulté puisque ce vecteur de référence n'est pas défini a priori, mais prend à chaque instant la valeur de la meilleure estimation disponible. Ainsi, une mauvaise initialisation du filtre veut dire un mauvais choix du vecteur de référence, ce qui conduit à des erreurs dans l'estimation qui peuvent causer dans certains cas la divergence du filtre.

6. APPLICATION EXPERIMENTALE

6.1. Dispositif experimental

Nous avons profité de la présence d'un dispositif expérimental déjà mis en place au Centre de Thermique de

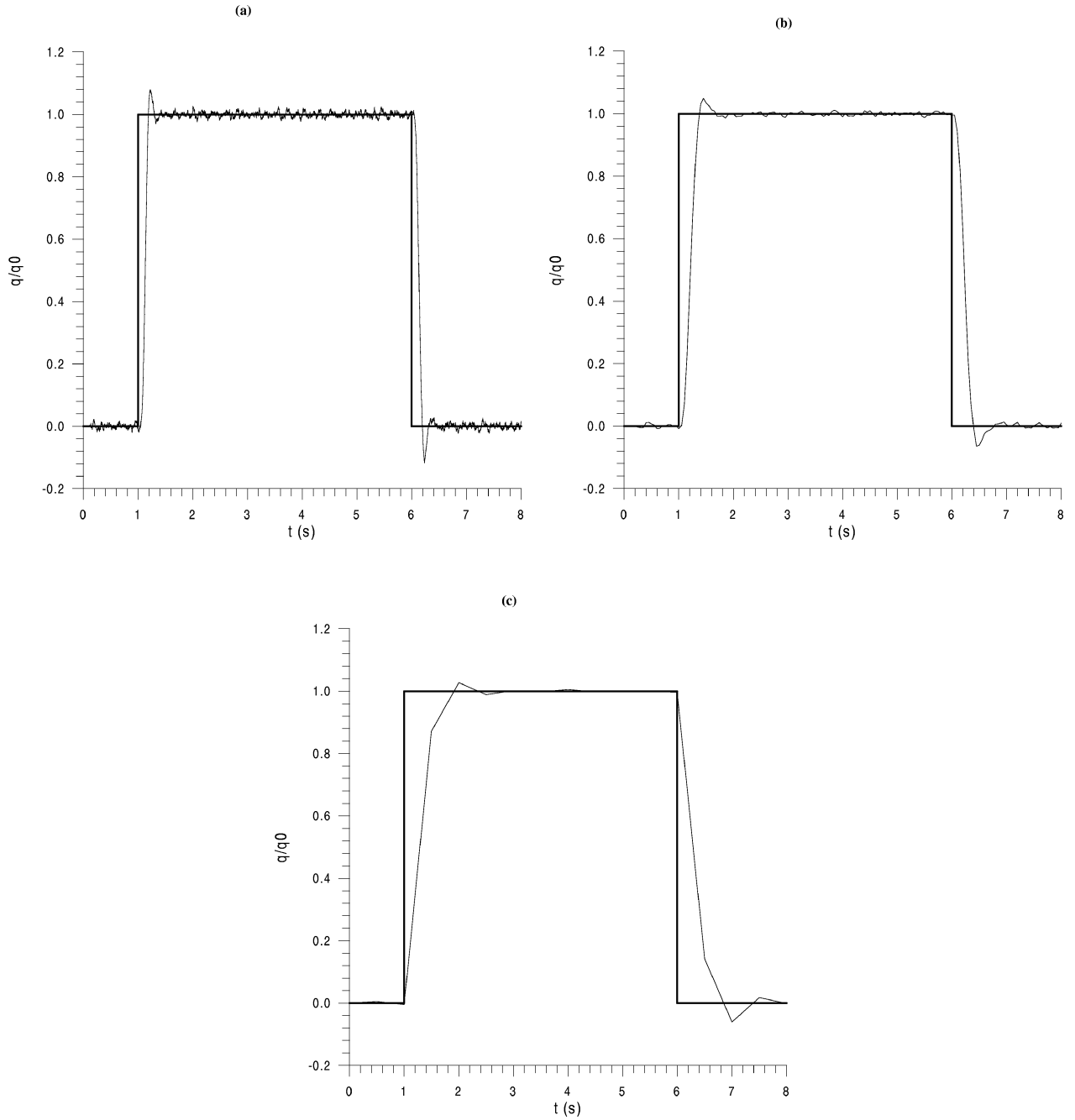


Figure 5. Comparaison entre les densités de flux de chaleur exactes (trait fort) et estimées (train fin) pour différents pas de temps inverse de filtrage. $\sigma_m = 0,01$ K; $\sigma_q = 0,5$ kW·m⁻²; $N = 21$; $i_m = 11$. (a) $\Delta t_i = 1$ ms ($\Delta t_i^* = 9,675 \cdot 10^{-4}$); (b) $\Delta t_i = 50$ ms ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); (c) $\Delta t_i = 0,5$ s ($\Delta t_i^* = 0,483$).

Figure 5. Comparison between true (thick line) and estimated (fine line) surface heat flux density for different inverse time steps. $\sigma_m = 0.01$ K; $\sigma_q = 0.5$ kW·m⁻²; $N = 21$; $i_m = 11$. (a) $\Delta t_i = 1$ ms ($\Delta t_i^* = 9.675 \cdot 10^{-4}$); (b) $\Delta t_i = 50$ ms ($\Delta t_i^* = 4.83 \cdot 10^{-2}$); (c) $\Delta t_i = 0.5$ s ($\Delta t_i^* = 0.483$).

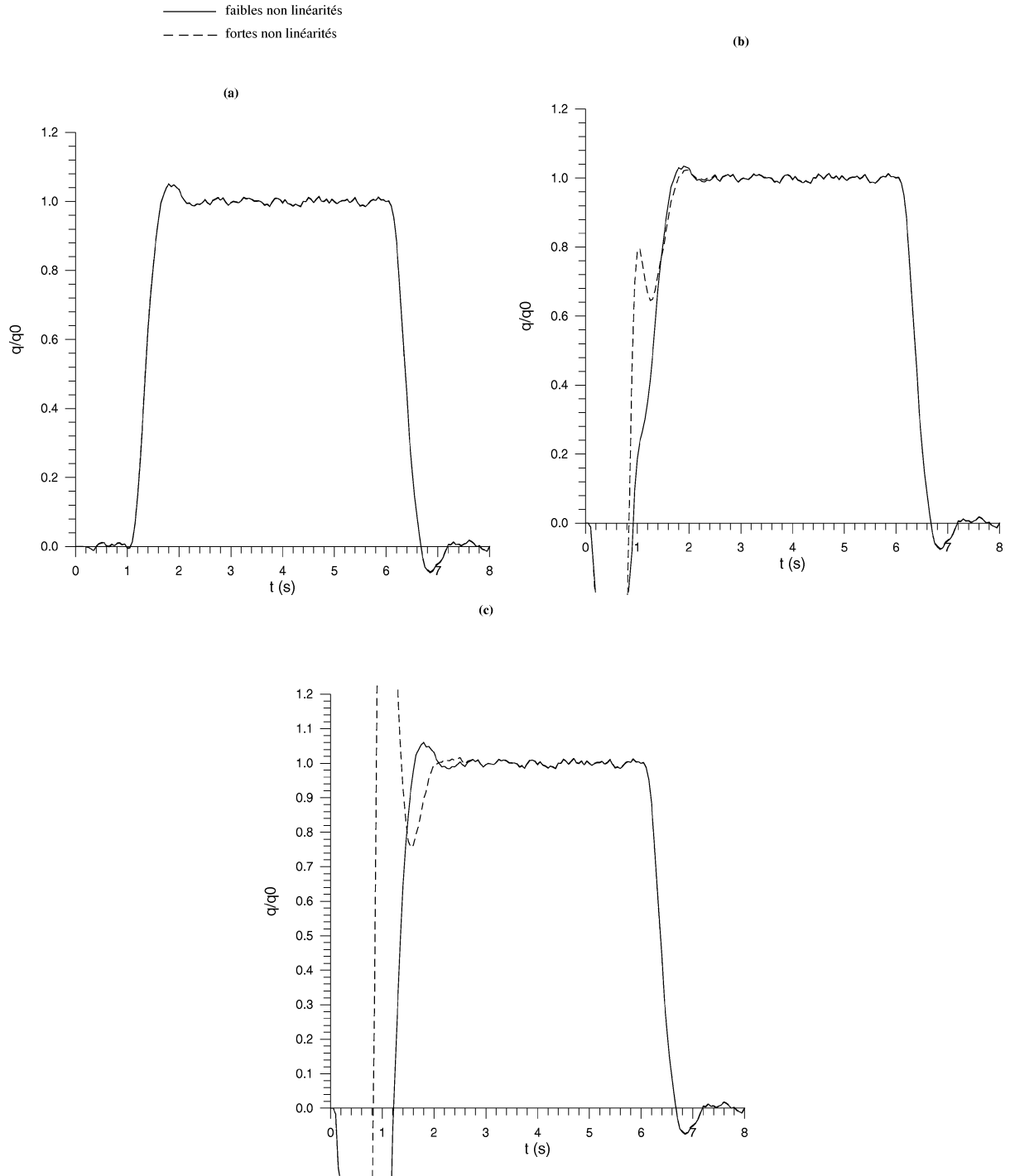


Figure 6. Influence de l'estimation initiale du filtre de Kalman étendu en présence de fortes non linéarités. $\sigma_q = 0,5 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$, $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); $N = 21$; $i_m = 11$: (a) état initial exact; (b) 10 % d'erreur sur l'état initial; (c) 20 % d'erreur sur l'état initial.

Figure 6. Influence of the initial estimation of the extended Kalman filter in presence of important nonlinearities. $\sigma_q = 0.5 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$, $\Delta t_i = 0.05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4.83 \cdot 10^{-2}$); $N = 21$; $i_m = 11$: (a) exact initial state; (b) 10 % of error on initial state; (c) 20 % of error on initial state.

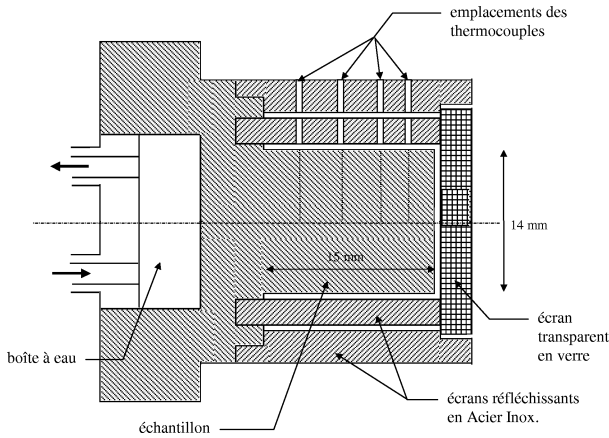


Figure 7. Schéma de principe du dispositif expérimental.

Figure 7. Sketch of the experimental set-up.

Lyon à l'INSA afin d'effectuer des mesures expérimentales réelles et d'observer le comportement du filtre de Kalman en présence de ces mesures.

L'échantillon est un cylindre en acier inoxydable de diamètre 14 mm et d'épaisseur 15 mm. Afin de minimiser les pertes latérales de chaleur, deux écrans réfléchissants en acier inoxydable sont placés autour du cylindre en laissant une lame d'air d'épaisseur 1 mm. Une deuxième lame d'air de même épaisseur sépare les deux écrans (figure 7). Un écran transparent en verre de diamètre 25 mm et d'épaisseur 4 mm est placé contre la surface de l'échantillon exposée au flux de chaleur, afin d'éviter les pertes par convection. Cette surface est soumise à une attaque thermique par rayonnement provenant d'un four à image conçu dans le but d'atteindre des hautes températures et qui permet de fournir une puissance thermique dont la densité superficielle est supposée uniforme.

Ce four se compose de deux miroirs paraboliques en cristal de même axe horizontal ayant chacun un diamètre de 1,5 m et un angle d'ouverture de 120° et de distance focale 650 mm. Le rayonnement provient d'une lampe à incandescence ayant 4 filaments de tungstène de surface rayonnante totale 25 cm^2 , de puissance maximale 5 kW et de tension maximale 115 V. Ce rayonnement est concentré vers l'échantillon grâce à une ou plusieurs réflexions sur les deux miroirs. Un alignement minutieux de ce système de concentration étant nécessaire afin d'éviter des pertes considérables d'énergie.

Pour augmenter le pouvoir d'absorption du rayonnement provenant du four, la surface d'entrée du cylindre est recouverte d'une peinture noire mate (émissivité totale 0,98) capable de supporter des hautes températures.

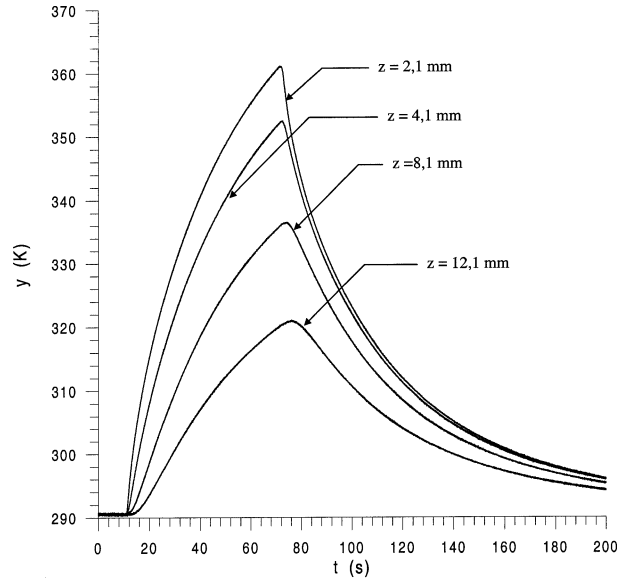


Figure 8. Thermogrammes enregistrés à partir des quatre thermocouples.

Figure 8. Recorded temperatures from the four thermocouples.

La face arrière du cylindre est refroidie par une circulation d'eau. Les propriétés thermophysiques de l'acier inoxydable, déterminées expérimentalement, sont celles utilisées dans la simulation numérique.

Quatre thermocouples de type K et de diamètre 0,1 mm sont microsoudés à l'intérieur de l'échantillon, à $\pm 0,05 \text{ mm}$, aux abscisses (en mm) : $z_1 = 2,1$; $z_2 = 4,1$; $z_3 = 8,1$ et $z_4 = 12,1$. L'acquisition numérique des températures est assurée par un appareil Keithley (modèle 575).

6.2. Estimation de la densité de flux de chaleur

Les températures fournies par les quatre thermocouples sont enregistrées avec une vitesse de $20 \text{ lectures} \cdot \text{s}^{-1}$ pour une puissance de la lampe de 1656 W soit $66,24 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ (figure 8).

Le flux de chaleur absorbé à la surface de l'échantillon est estimé en utilisant au moins deux thermogrammes (un pour l'inversion et l'autre comme deuxième condition-limite) et un pas de temps inverse $\Delta t_i = 50 \text{ ms}$. Un pas de temps plus faible ($\Delta t = \Delta t_i / 25$) est utilisé dans les calculs de prédiction pour une meilleure précision et pour assurer la stabilité du schéma explicite utilisé. Ceci nous conduit à effectuer une interpolation linéaire dans les temps des températures fournies par le second capteur avant de les introduire dans les calculs de prédiction.

La discrétisation spatiale étant effectuée avec un pas d'espace $\Delta z = 0,417$ mm et l'écart type relatif au bruit de mesure affectant les mesures étant estimé à $\sigma_m = 0,05$ K.

Afin de montrer l'influence du positionnement des capteurs de mesures sur la densité de flux de chaleur estimée, il est nécessaire de calculer et de comparer les coefficients de sensibilité, associés aux différents nœuds, vis à vis de la grandeur à estimer. Ces coefficients représentent les perturbations de l'état du système (températures) engendrées par des perturbations affectant le paramètre inconnu (densité de flux de chaleur surfacique). Ainsi, le coefficient de sensibilité du nœud i à l'instant k est défini par la dérivée : $\Phi_k^i = \partial T_k^i / \partial q_k$.

Une analyse de la sensibilité permet de situer la localisation optimale de la prise d'information. En effet, lorsque les coefficients de sensibilité prennent des valeurs plus élevées, cela veut dire que les mesures sont plus sensibles aux variations du paramètre inconnu. Par contre si ces valeurs sont faibles, le problème inverse devient très sensible aux erreurs de mesures et l'estimation devient difficile.

Etant donné que le problème inverse considéré est non linéaire, il n'est pas possible d'avoir une expression analytique des coefficients de sensibilité. L'approximation suivante est utilisée [24, 27] :

$$\Phi_k^i = \frac{\partial T_k^i}{\partial q_k} \approx \frac{T_k^i(q_k + \varepsilon) - T_k^i(q_k)}{\varepsilon} \quad (27)$$

où ε est un nombre de faible valeur ici égal à 10^{-4} .

D'après la *figure 9*, les coefficients de sensibilité sont d'autant plus importants que l'on s'approche de la surface exposée au flux de chaleur. En effet, la nature de la diffusion de la chaleur dans un solide est telle qu'une variation du flux surfacique et donc de la température de surface, se traduit à la fois par un amortissement et un déphasage en tout point intérieur du solide. Ainsi, une perturbation de la température d'un point intérieur engendrée par une perturbation à la surface (ce qui représente le coefficient de sensibilité) sera d'autant plus amortie et déphasée que le point est loin de la surface.

Ce résultat est confirmé en représentant les intervalles de confiance (*figure 10*) correspondant à la densité de flux de chaleur estimée pour différentes positions du premier capteur (z_1 ou z_2 ou z_3). Le deuxième capteur étant toujours à la même abscisse z_4 .

En considérant que la distribution des erreurs de mesures est gaussienne (normale) [24], ces intervalles de

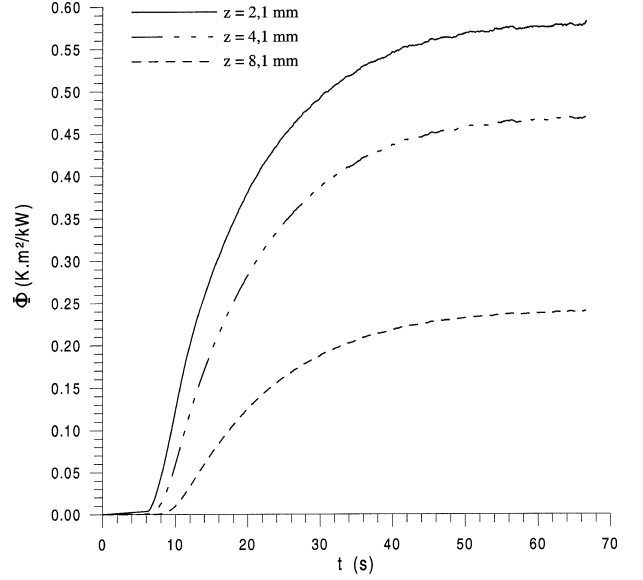


Figure 9. Evolution temporelle des coefficients de sensibilité pour trois nœuds différents.

Figure 9. Time evolution of sensitivity coefficients for three different nodes.

confiance sont déterminés par [3] :

$$(q - 2,576\sigma_p) < q < (q + 2,576\sigma_p)$$

où σ_p est l'écart type (fourni par le filtre) associé à l'erreur d'estimation.

Ceci veut dire que la valeur estimée est comprise entre ces limites avec une probabilité de 99 %. En effet, la *figure 10* montre que la plage d'estimation devient plus réduite lorsque le nœud de mesure est plus proche de la surface exposée au flux. Ceci traduit une plus grande dépendance du problème du paramètre à estimer due à une plus grande sensibilité du nœud de mesure vis à vis de ce paramètre. On note que ces intervalles de confiance ne prennent pas en compte les incertitudes sur les propriétés thermophysiques ni sur les positions des capteurs.

Ces résultats sont validés en estimant la même densité de flux de chaleur à l'aide de la méthode inverse de retour à la surface proposée par Raynaud et Bransier [5, 12]. Cette méthode appartient à un groupe de méthodes spécifiquement développées pour la résolution des problèmes inverses de conduction de chaleur, basées sur les différences finies et dont la stabilité est assurée par l'introduction d'un biais dans la discrétisation. Cette méthode est d'autant plus stable que le module de Fourier ($M = a\Delta t / \Delta z^2$) est plus grand. En pratique ce module doit être supérieur à l'unité [5].

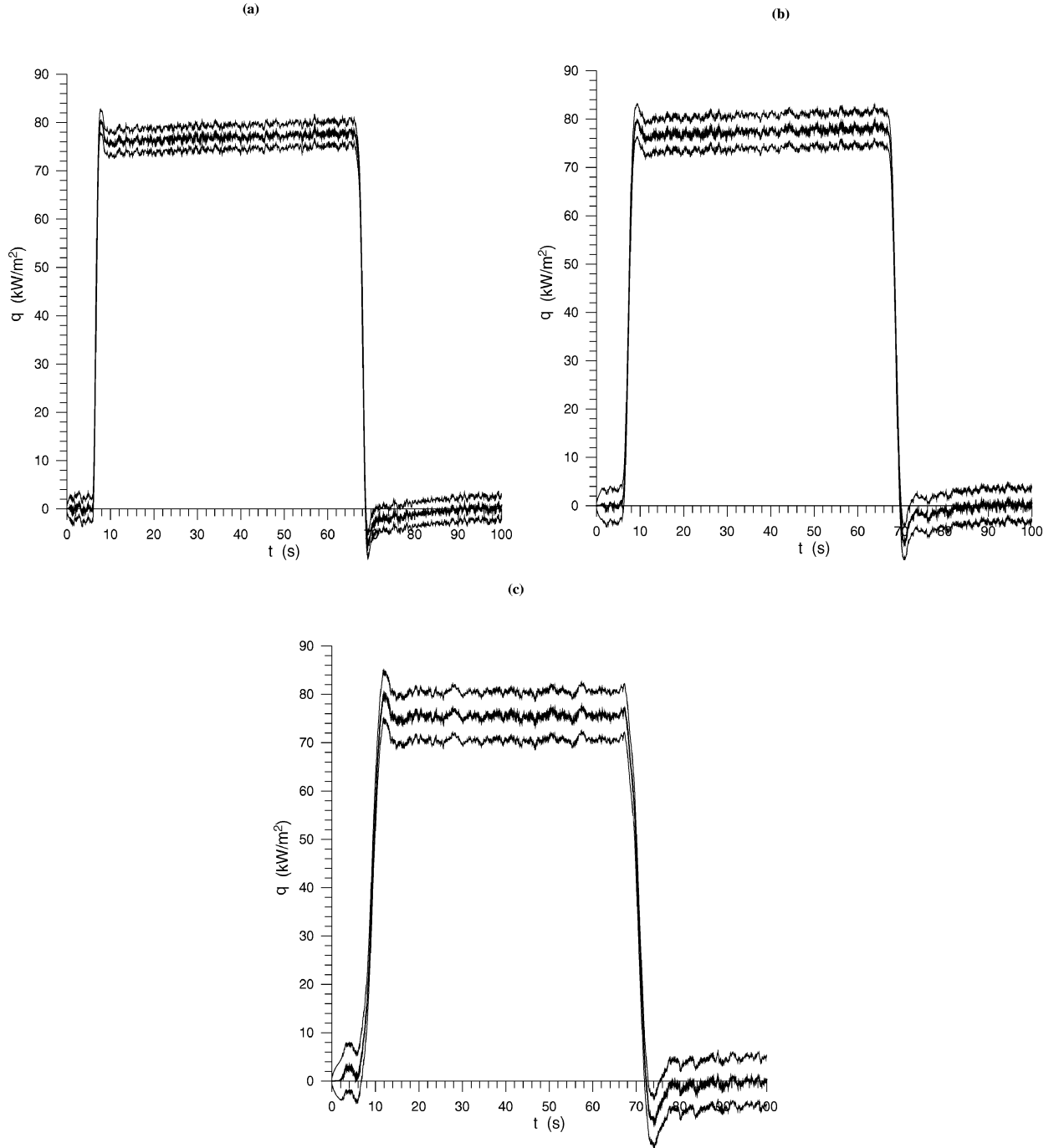


Figure 10. Représentation des intervalles de confiance (trait fin) correspondant à la densité de flux de chaleur estimée (trait fort central) pour différentes positions du premier capteur. $\sigma_q = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$; $z_1 = 12,1 \text{ mm}$; (a) $z_m = 2,1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 4,83\cdot 10^{-2}$); (b) $z_m = 4,1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 1,15\cdot 10^{-2}$); (c) $z_m = 8,1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 2,95\cdot 10^{-3}$).

Figure 10. Representation of confidence bounds (fine line) corresponding to the estimated heat flux density (strong line) for different positions of the first sensor. $\sigma_q = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0.05 \text{ s}$; $z_1 = 12.1 \text{ mm}$; (a) $z_m = 2.1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 4.83\cdot 10^{-2}$); (b) $z_m = 4.1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 1.15\cdot 10^{-2}$); (c) $z_m = 8.1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 2.95\cdot 10^{-3}$).

La superposition des densités de flux de chaleur, estimées avec les deux méthodes (*figure 11*), montre un léger déphasage dans le temps de la densité de flux de chaleur estimée à l'aide du filtre de Kalman. Ce déphasage devient plus important lorsqu'on augmente la distance surface-capteur. On remarque également qu'en éloignant le premier capteur de la surface exposée au flux, la solution devient moins stable pour les deux méthodes, notamment lorsque σ_q est plus grand pour le filtre de Kalman. Ceci peut être expliqué à partir du pas de temps adimensionnel caractéristique Δt_i^* qui diminue lorsque z_m augmente ce qui conduit à une résolution plus sensible aux erreurs aléatoires des mesures.

Le phénomène de déphasage observé au niveau de la solution du filtre de Kalman peut être interprété à l'aide des résultats de l'étude de la sensibilité (*figure 9*) qui montrent un déphasage dans le temps des coefficients de sensibilité des nœuds internes. Ainsi, une mesure de température interne à un instant t_1 permet d'estimer le flux surfacique à un instant $t < t_1$ ce qui justifie la nécessité d'utiliser des températures futures afin d'obtenir une estimation correcte de ce flux. Cette notion de températures futures a été utilisée dans l'algorithme proposé par Raynaud et Bransier [5, 12] afin de compenser la perte d'information due à la distance entre la surface et le premier capteur et d'éviter, par conséquent, le déphasage de la solution.

Une technique de lissage associée au filtre de Kalman et introduisant la notion de températures futures a été utilisée par Scarpa et Milano [9] dans le cas d'un problème inverse de conduction de chaleur monodimensionnel linéaire. Les performances de cette technique ont été comparées à celles de la méthode de Beck et de la méthode de Raynaud et Bransier en étudiant pour chacune des trois méthodes la relation entre sensibilité aux erreurs de mesures et biais. Cette comparaison a montré que la performance de cette technique est très proche de celle de la méthode de Raynaud et Bransier pour des valeurs du biais supérieures à 7. L'étude de l'influence du nombre de températures futures a montré que lorsque ce nombre augmente, le biais ainsi que la sensibilité aux erreurs de mesure diminuent.

La notion de températures futures est introduite avec le filtre de Kalman en associant l'application de ce filtre à la procédure de lissage à intervalle d'observation fixe [18, 19]. Cette procédure est basée sur la maximisation de la densité de probabilité conditionnelle $p(\mathbf{X}_k/\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k, \dots, \mathbf{Y}_n)$ qui aboutit dans le cas linéaire à l'équation récurrente suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_{k/n} &= \hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{C}_k(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/n} - \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{X}}_{k/k} - \mathbf{U}_k) \\ \mathbf{C}_k &= \mathbf{P}_{k/k}\mathbf{F}_k^T\mathbf{P}_{k+1/k}^{-1}\end{aligned}\quad (28)$$

où $\hat{\mathbf{X}}_{k/n}$ représente l'estimation à l'instant k en utilisant n observations futures. Dans un premier temps, les $\hat{\mathbf{X}}_{k/k}$ et les $\mathbf{P}_{k/k}$ ($0 \leq k \leq n$) calculés par le filtre sont stockés. Ensuite, l'équation récurrente (28) est appliquée en utilisant comme conditions initiales $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}$ et $\mathbf{P}_{n/n}$ obtenus à la fin du premier calcul. Ainsi, l'estimation $\hat{\mathbf{X}}_{k/k}$ donne lieu à une estimation améliorée $\hat{\mathbf{X}}_{k/n}$ basée sur les mesures des n instants futurs. L'extension de cette technique au cas des problèmes non linéaires est possible mais assez complexe.

L'estimation de la densité de flux de chaleur en utilisant le premier capteur placé à l'abscisse z_1 (le deuxième capteur étant toujours en z_4) et en choisissant une valeur plus grande de l'écart type σ_q , permet de réduire le déphasage et conduit à une assez bonne superposition des solutions fournies par les deux méthodes (*figure 12*). Néanmoins, l'augmentation de σ_q affecte légèrement la stabilité de la solution, ce qui confirme les résultats de la simulation numérique.

On note que dans la méthode de retour à la surface, les données expérimentales sont préalablement filtrées à l'aide d'un filtre de Gauss de largeur $\omega = 61$. Pour les positions z_1 et z_2 , on utilise un module de Fourier $M = 4,38$; tandis que pour la position z_3 et vue la faible valeur de Δt_i^* , on utilise un module de Fourier plus grand ($M = 66,35$) et un filtrage préalable plus important des données expérimentales ($\omega = 101$) afin d'améliorer la stabilité de la solution.

L'influence de la position du deuxième capteur (qui fournit la deuxième condition-limite du problème) est également analysée à travers la *figure 13*. Celle-ci montre que la solution du filtre de Kalman est peu sensible à la position de ce capteur.

Etant donné que le nœud situé en z_1 est le plus sensible vis à vis de la densité de flux de chaleur surfacique, l'estimation effectuée en exploitant simultanément les informations provenant de deux capteurs (placés aux abscisses z_1 et z_2), puis de trois capteurs (placés aux abscisses z_1 , z_2 et z_3), n'apporte aucune amélioration par rapport à la densité de flux de chaleur estimée en utilisant uniquement le capteur situé en z_1 (*figure 14*).

La densité de flux de chaleur estimée avec le filtre de Kalman ainsi que les intervalles de confiance correspondants sont représentés sur la *figure 15* pour différentes valeurs du pas de temps inverse. Pour chacune de ces valeurs, la densité de flux de chaleur est comparée à celle fournie par la méthode de Raynaud et Bransier.

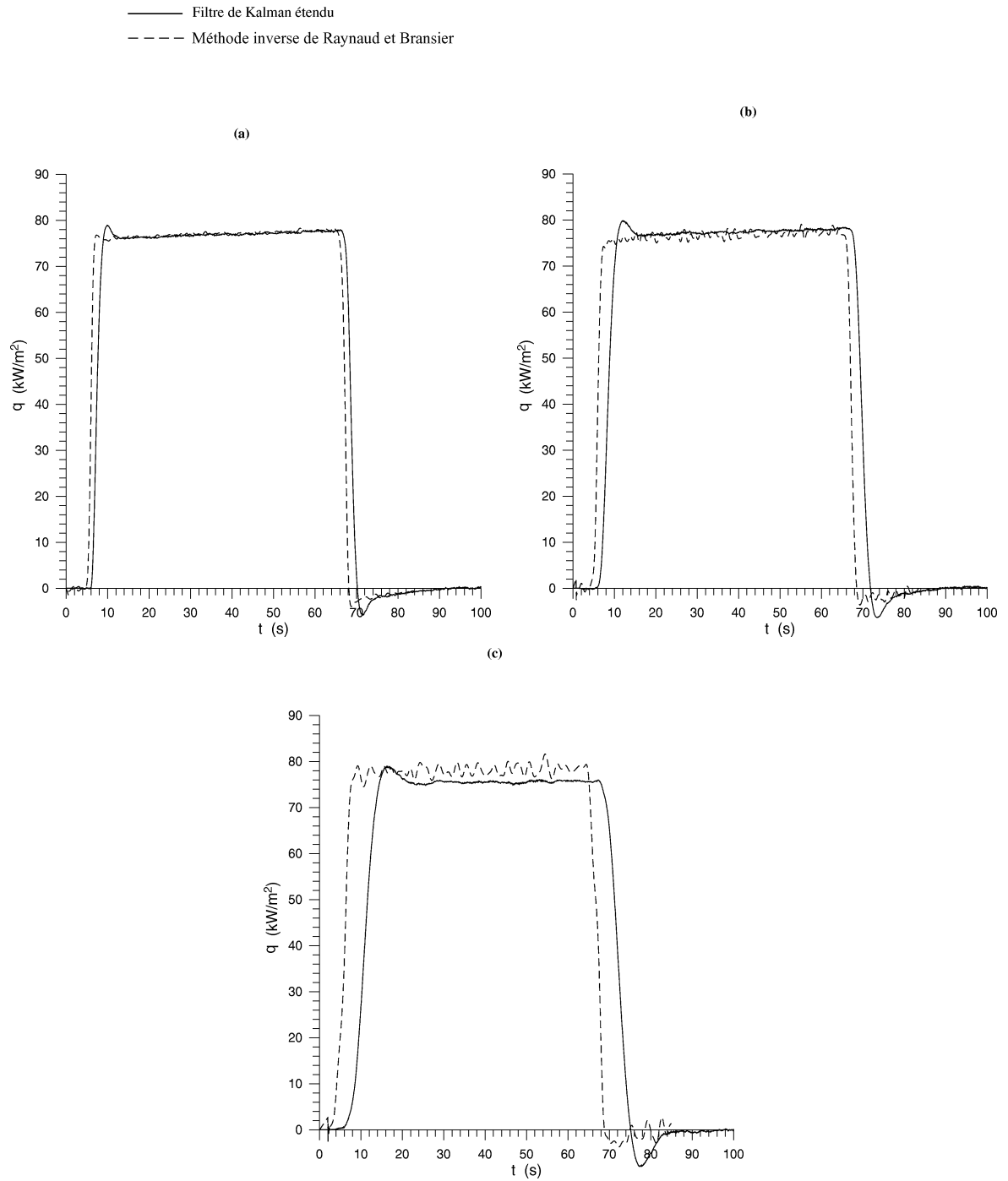


Figure 11. Influence de la localisation du premier capteur et validation avec la méthode inverse de Raynaud et Bransier. $\sigma_q = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$; $z_1 = 12,1 \text{ mm}$. (a) $z_m = 2,1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); (b) $z_m = 4,1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 1,15 \cdot 10^{-2}$); (c) $z_m = 8,1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 2,95 \cdot 10^{-3}$).

Figure 11. Influence of the first sensor location and validation with the Raynaud's and Bransier's inverse method. $\sigma_q = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0.05 \text{ s}$; $z_1 = 12.1 \text{ mm}$. (a) $z_m = 2.1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 4.83 \cdot 10^{-2}$); (b) $z_m = 4.1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 1.15 \cdot 10^{-2}$); (c) $z_m = 8.1 \text{ mm}$ ($\Delta t_i^* = 2.95 \cdot 10^{-3}$).

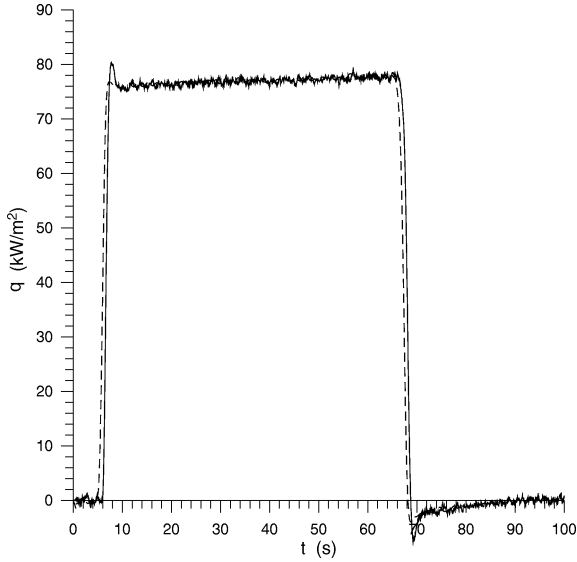


Figure 12. Influence de l'écart type σ_q , $\sigma_q = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); $z_m = 2,1 \text{ mm}$; $z_l = 12,1 \text{ mm}$.

Figure 12. Influence of the standard deviation σ_q , $\sigma_q = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); $z_m = 2,1 \text{ mm}$; $z_l = 12,1 \text{ mm}$.

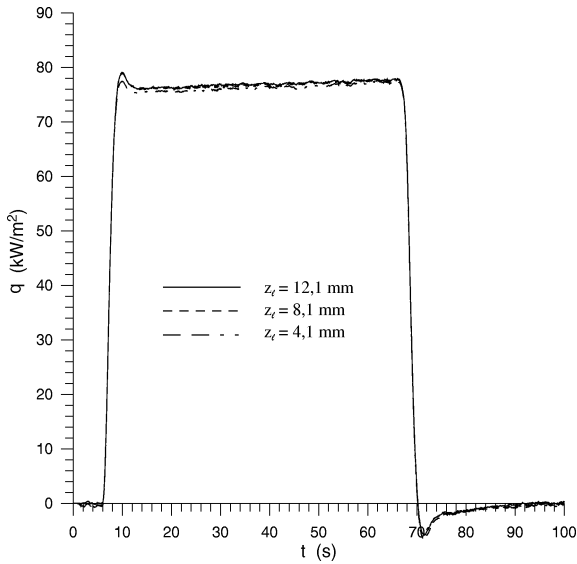


Figure 13. Influence de la localisation du second capteur. $\sigma_q = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); $z_m = 2,1 \text{ mm}$.

Figure 13. Influence of the second sensor location. $\sigma_q = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4,83 \cdot 10^{-2}$); $z_m = 2,1 \text{ mm}$.

D'après ces résultats, on remarque que l'augmentation du pas de temps inverse améliore la stabilité de la solution pour les deux méthodes. La plage d'estimation

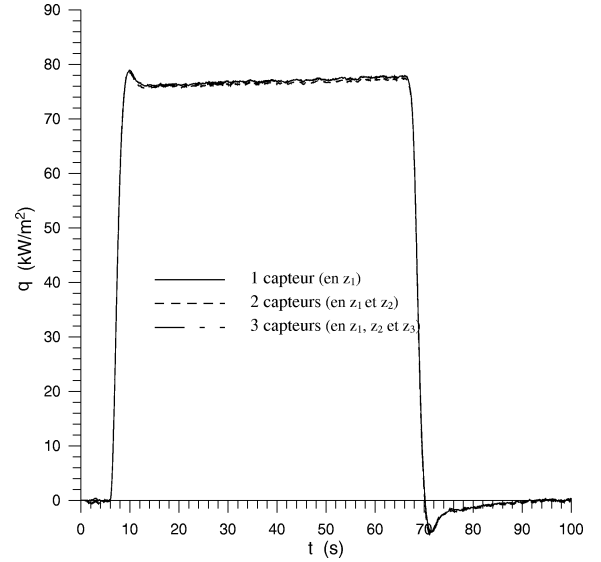


Figure 14. Estimation de la densité de flux de chaleur en utilisant deux et trois capteurs simultanément. $\sigma_q = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$; $z_l = 12,1 \text{ mm}$.

Figure 14. Estimation of the heat flux density by using two and three sensors simultaneously. $\sigma_q = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$; $z_l = 12,1 \text{ mm}$.

fournie par le filtre de Kalman devient plus réduite lorsque Δt_i augmente ce qui traduit une diminution de la sensibilité de la solution aux perturbations affectant les mesures. L'écart par rapport à la solution de la méthode de Raynaud et Bransier augmente légèrement. Ce pas de temps inverse est choisi de façon à répondre au critère du pas de temps adimensionnel caractéristique du problème inverse ($\Delta t_i^* > 10^{-3}$) valable pour n'importe quelle méthode inverse.

La figure 16 représente la densité de flux de chaleur estimée avec le filtre de Kalman munie des intervalles de confiance correspondants pour différentes valeurs de l'écart type σ_q . On remarque à partir des résultats obtenus que l'étendue de la plage d'estimation augmente avec la valeur de σ_q .

En effet, cet écart type traduit une incertitude sur le modèle et lorsqu'il prend des valeurs importantes, cela veut dire que le filtre attache beaucoup plus d'importance aux mesures qu'au modèle lui-même. Sa sensibilité vis à vis des perturbations affectant les mesures est ainsi plus grande.

Le temps de calcul avec le filtre de Kalman étendu dépend fortement du rapport $\Delta t_i / \Delta t$. En effet, lorsque ce rapport est égal à l'unité, l'estimation nécessite un temps CPU de 28 secondes (machine de type Pentium II, 266 MHz). Si $\Delta t_i / \Delta t$ est cinq fois plus grand, le temps

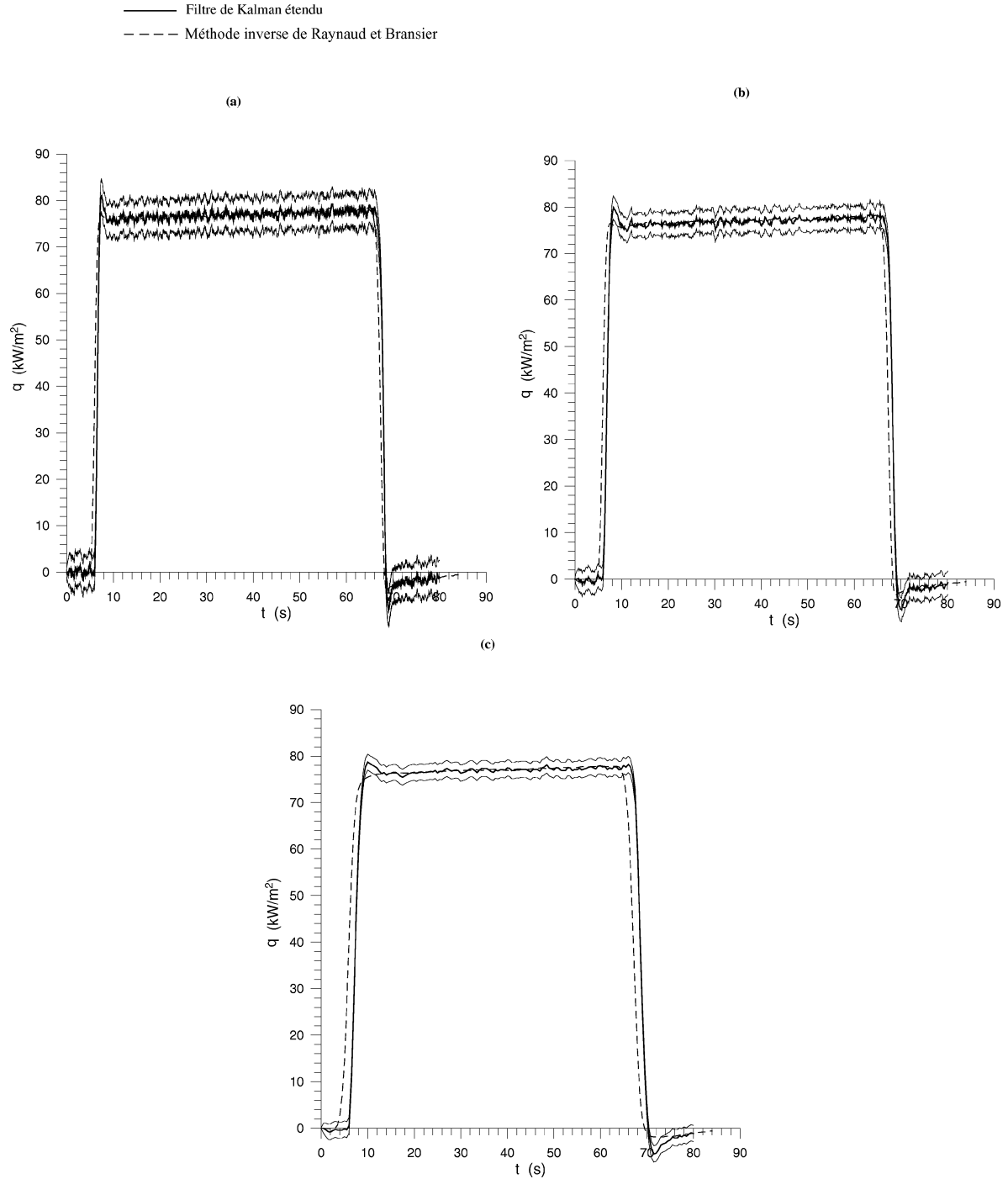


Figure 15. Représentation des intervalles de confiance (très fin) de la densité de flux de chaleur estimée avec le filtre de Kalman (très fort) pour différents pas de temps inverse. Validation avec la méthode de Raynaud et Bransier. $\sigma_q = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$; $z_m = 2,1 \text{ mm}$; (a) $\Delta t_i = 0,05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4,38 \cdot 10^{-2}$); (b) $\Delta t_i = 0,15 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 0,131$); (c) $\Delta t_i = 0,5 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 0,438$).

Figure 15. Representation of confidence bounds (fine line) of the heat flux density estimated with Kalman filter (strong line) for different inverse time steps. Validation with the Raynaud's and Bransier's method. $\sigma_q = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$; $z_m = 2.1 \text{ mm}$; (a) $\Delta t_i = 0.05 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 4.38 \cdot 10^{-2}$); (b) $\Delta t_i = 0.15 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 0.131$); (c) $\Delta t_i = 0.5 \text{ s}$ ($\Delta t_i^* = 0.438$).

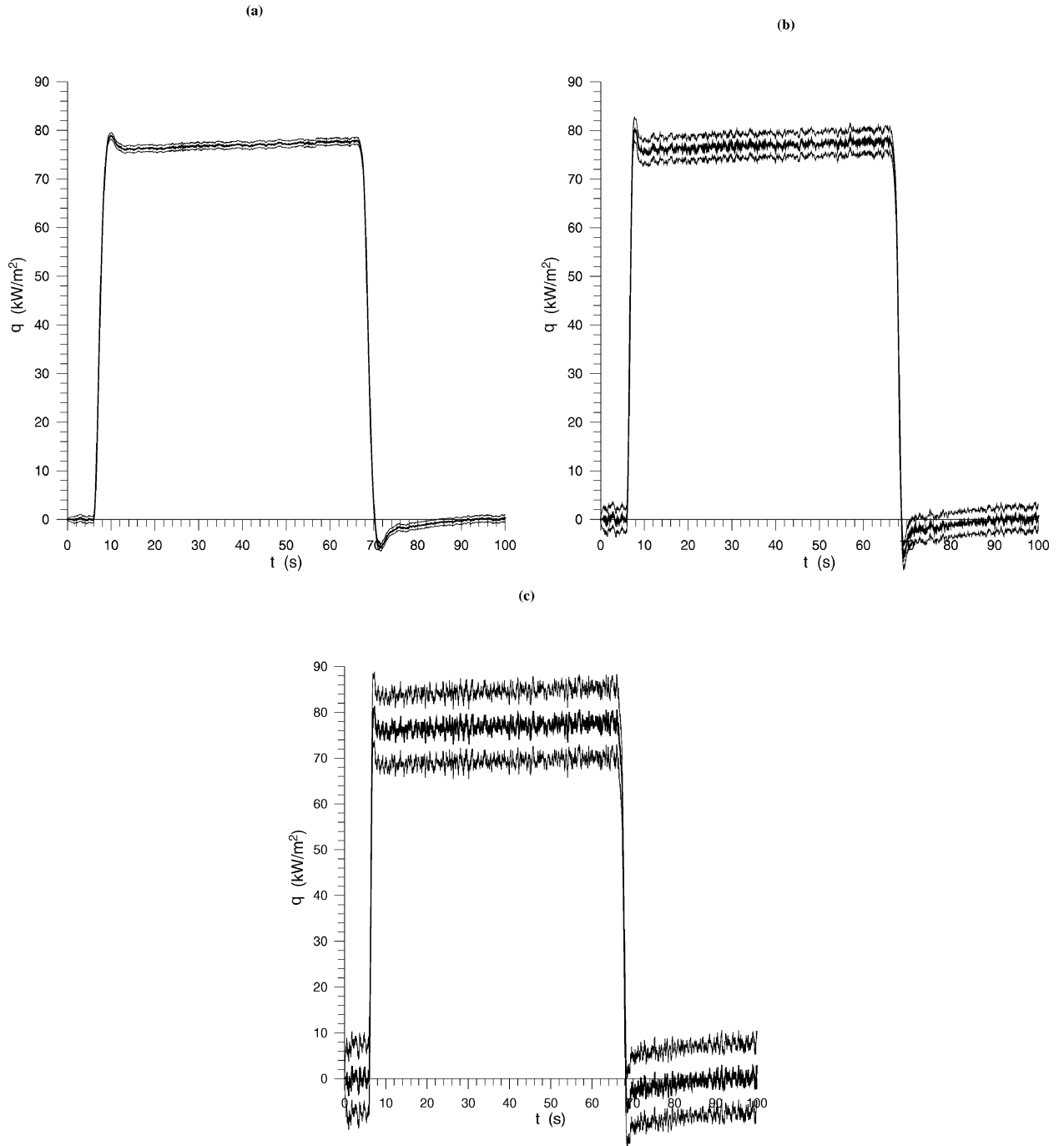


Figure 16. Estimations et intervalles de confiance pour différentes valeurs de σ_q . $\Delta t_i = 0,05$ s ($\Delta t_i^* = 4,38 \cdot 10^{-2}$); $z_m = 2,1$ mm; $z_l = 12,1$ mm. (a) $\sigma_q = 10$ W·m $^{-2}$; (b) $\sigma_q = 50$ W·m $^{-2}$; (c) $\sigma_q = 200$ W·m $^{-2}$.

Figure 16. Estimations and confidence bounds for different values of σ_q . $\Delta t_i = 0.05$ s ($\Delta t_i^* = 4.38 \cdot 10^{-2}$); $z_m = 2.1$ mm; $z_l = 12.1$ mm. (a) $\sigma_q = 10$ W·m $^{-2}$; (b) $\sigma_q = 50$ W·m $^{-2}$; (c) $\sigma_q = 200$ W·m $^{-2}$.

CPU augmente jusqu'à 130 secondes. En choisissant les mêmes pas d'espace et de temps, la méthode proposée par Raynaud et Bransier est à peu près deux fois plus rapide.

7. CONCLUSION

Malgré sa formulation complexe basée sur une approche statistique, le filtre de Kalman discret nous a offert la possibilité de reconstruire une densité de flux de chaleur surfacique et d'obtenir une solution qui demeure stable en présence de données bruitées. La faisabilité de l'inversion avec le filtre de Kalman étendu a été, tout d'abord, étudiée dans un cas test où les températures sont simulées et entachées d'un bruit blanc gaussien. A partir de cette simulation numérique, nous avons pu démontrer la bonne adaptation du filtre aux problèmes non linéaires et étudier l'influence de l'emplacement du capteur de mesure, de l'erreur associée au modèle et du pas de temps inverse, sur la qualité de restitution de la densité de flux de chaleur.

Une application expérimentale a été effectuée dans le but de valider cette technique inverse et de vérifier son adaptation au caractère aléatoire du bruit affectant les mesures. La méthode inverse de retour à la surface proposée par Raynaud et Bransier a été utilisée pour l'estimation de la même densité de flux de chaleur à partir des mesures issues du dispositif expérimental. La validité de nos résultats, obtenus avec le filtre de Kalman, a été vérifiée par la superposition des densités de flux de chaleur estimées avec les deux méthodes.

Pour des raisons liées, notamment, au choix de la localisation de la mesure et de la valeur de l'écart type σ_q associé à l'incertitude sur le modèle, la densité de flux de chaleur estimée avec le filtre de Kalman est légèrement déphasée par rapport à la solution fournie par la méthode de retour à la surface. Ce déphasage diminue lorsqu'on approche le capteur de mesure de la surface exposée au flux ou lorsqu'on augmente la valeur de l'écart type σ_q associé à l'erreur du modèle. Néanmoins, il ne faut pas augmenter indéfiniment cette valeur car ceci a pour effet d'augmenter la sensibilité de la solution vis à vis des erreurs aléatoires des mesures. Il faut chercher le meilleur compromis entre précision et stabilité.

Le déphasage de la solution nous a conduit à réfléchir sur la possibilité d'introduire la notion de températures futures; une technique qui est à l'origine du succès de plusieurs méthodes inverses et qui a été utilisée avec le filtre de Kalman uniquement pour des problèmes linéaires.

Nous avons également vérifié la capacité du filtre de Kalman à traiter simultanément les informations provenant de deux ou de plusieurs capteurs placés en des positions différentes.

Ce filtre fournit, en plus de l'estimée, la variance associée à l'erreur d'estimation; ce qui nous a permis de représenter les intervalles de confiance associés à la densité de flux de chaleur estimée et d'étudier l'influence de la localisation de la mesure, de l'erreur associée au modèle et du pas de temps inverse sur la plage d'estimation.

Cette technique est en mesure d'apporter une correction sur l'état propre du système, se prête parfaitement à l'identification simultanée de plusieurs paramètres et peut être étendue aux problèmes multidimensionnels.

RÉFÉRENCES

- [1] Huang C.-H., Yan J.Y., An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity, *Int. J. Heat Mass Tran.* 38 (1995) 3433-3441.
- [2] Milano G., Scarpa F., Some strategy for handling measurement biases in inverse problems with application to thermophysical properties identification, *Ecole d'Hiver du METTI*, 1999.
- [3] Silva Neto A.J., Özisik M.N., An inverse problem of estimating thermal conductivity, optical thickness and single scattering albedo of a semi-transparent medium, *Theory and Practice ASME* (1993) 267-273.
- [4] Rymarz C., On stochastic identification of boundary and initial conditions for parabolic, hyperbolic and parabolic-hyperbolic equations, in: *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Bui, Tanaka et al. Editions, 1994.
- [5] Raynaud M., Contribution à l'étude des problèmes inverses en thermique, *Mémoire d'habilitation*, INSA de Lyon, 1993.
- [6] Beck J.V., Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem, *Int. J. Heat Mass Tran.* 13 (1970) 703-716.
- [7] Blanc G., Raynaud M., Chau T.H., A guide for the use of the function specification method for 2D inverse heat conduction problems, *Rev. Gén. Therm.* 37 (1998) 17-30.
- [8] Hensel E.C., Hills R.G., An initial value approach to the inverse heat conduction problem, *ASME J. Heat Tran.* 108 (1986) 248-256.
- [9] Scarpa F., Milano G., Kalman smoothing technique applied to the inverse heat conduction problem, *Num. Heat Tran.* 28B (1995) 79-96.
- [10] Dorai G.A., Tortorelli D.A., Transient inverse heat conduction problem solutions via Newton's method, *Int. J. Heat Mass Tran.* 40 (1997) 4115-4127.
- [11] Taler J., Zima W., Solution of inverse heat conduction problems using control volume approach, *Int. J. Heat Mass Tran.* 42 (1999) 1123-1140.

- [12] Raynaud M., Bransier J., A new finite difference method for the nonlinear inverse heat conduction problem, *Num. Heat Tran.* 9 (1986) 27–42.
- [13] Ruperti N., Raynaud M., Sacadura J.F., A method for the solution of the coupled inverse heat conduction-radiation problem. *ASME J. Heat Tran.* 118 (1996) 10–17.
- [14] Tikhonov A.N., Arsenin V.Y., *Solutions of Ill-posed Problems*, V.H. Winston and Sons, Washington, DC, 1977.
- [15] Guo L., Murio D.A., Roth C., A mollified space marching finite difference algorithm for the inverse heat conduction problem with slab symmetry, *Comp. Math. Appl.* 19 (1990) 75–89.
- [16] Weber C.F., Analysis and solution of the ill-posed inverse heat conduction problem, *Int. J. Heat Mass Tran.* 24 (1981) 1783–1792.
- [17] Blanc G., Beck J.V., Raynaud M., Solution of the inverse heat conduction problem with a time variable number of future temperatures, *Num. Heat Tran.* 32B (1997) 437–451.
- [18] Labarrere M., Krief J.P., Gimonet B., *Le filtrage et ses applications*, Cepadues Editions, 1982.
- [19] Brown R.G., Hwang P.Y.C., *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley and Sons, 1992.
- [20] Raynaud M., Beck J.V., Methodology for comparison of inverse heat conduction methods, *J. Heat Tran.* 110 (1988) 30–37.
- [21] Scarpa F., Bartolini R., Milano G., State space (Kalman) estimator in the reconstruction of thermal diffusivity from noisy temperature measurements, *High Temperatures-High Pressure* 23 (1991) 633–642.
- [22] Scarpa F., Milano G., Pescetti D., Thermophysical properties estimation from transient data: Kalman versus Gauss approach, in: *ASME Book 100357*, 1993, pp. 109–116.
- [23] Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Series in Computational Methods in Mechanical and Thermal Sciences, Hemisphere/Mc Graw-Hill, New York, 1980.
- [24] Minkowycz W.J., Sparrow E.M., Schneider G.E., Pletcher R.H., *Handbook of Numerical Heat Transfer*, Wiley Interscience, 1988.
- [25] Beck J.V., Woodbury K.A., Inverse problems and parameter estimation: integration of measurements and analysis, *Meas. Sci. Technol.* 9 (1998) 839–847.
- [26] Raynaud M., Combination of methods for the inverse heat conduction problem with smoothing filters, in: *AIAA/ASME 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference*, Boston, USA, 1986.
- [27] Raynaud M., Strategy for experimental design and the estimation of parameters, *High Temperatures-High Pressure* 31 (1999) 1–15.

Abridged English version

An extended version of the discrete Kalman filter applied to a nonlinear inverse heat conduction problem

1. Introduction

Inverse problems are encountered in cases where a quantity is not able to be measured directly. Their resolution has numerous industrial applications such as nondestructive control of materials, operations of metal casting, exploration of minerals and petroleum, etc.

In the field of heat transfer, the use of inverse methods to estimate boundary conditions or to determine thermophysical properties has a big importance. These methods join the theoretical model to the physical observations. They use information given by temperature sensors, placed within the studied medium, and inject them in the model in order to go back to the unknown quantity.

The study carried out in this frame deals with the estimation of a transient heat flux density, absorbed at the boundary of a one-dimensional transient nonlinear

heat conduction model, by using transient temperature measurements taken within the medium. This kind of inverse problems has been handled by Beck [6], Blanc et al. [7], Hensel and Hills [8], Scarpa and Milano [9] and Raynaud and Bransier [12]. The method that we use is a formulation of the discrete Kalman filter [18, 19] based on a statistical approach and extended to nonlinear systems. This formulation is firstly tested in a numerical simulation in order to analyse the effect of the main parameters, that condition the running of the filter, on the estimation result. This numerical simulation aims to check the inversion feasibility before starting the experimental application in which the absorbed surface heat flux to estimate is coming from a reflection furnace. The inversion results of the Kalman filter are validated with those provided by the inverse method proposed by Raynaud and Bransier [5, 12] which is simple, rapid and can easily adapt to nonlinear problems.

2. Description of the inverse heat conduction problem

A cylindrical sample of homogeneous and isotropic material, initially at a uniform temperature, is subject at time $t = 0$ to a heat flux density $q(t)$ at the boundary surface $z = 0$ (*figure 1*). The boundary condition at $z = e$ is considered not accurately known. To compensate for this lack of information, measured temperatures are given at an interior point at different times. So to estimate the surface heat flux density, we use at least two transient temperature measurements. The one taken at $z = z_m$ is used for the inversion, and the other taken at $z = z_l$ represents the second boundary condition of the problem. In order to get a one-dimensional temperature distribution inside the heat conducting body, we consider that the lateral surface of the cylinder is insulated. The variation laws of the heat conductivity and the specific heat as functions of temperature, are considered known.

Contrary to many inverse methods based on finite difference schemes [5], the Kalman algorithm handles the inverse problem as a direct one. Its formulation leads to an iterative procedure that takes place in two stages: the prediction that consists of estimating the state at time $k + 1$ from observations until the time k , and the estimation which is the correction of the predicted value of the state by using the new information given by the observation at time $k + 1$.

The resulting equations [18] are essentially applied to linear systems with white measure noise. In the present study, we use an extended version of the Kalman filter because the model is non linear in accordance to the state. We also use the approximation adopted by Scarpa and Milano [9] which represents the heat flux by a piece-wise constant function. This approximation leads to an error in the model that can be compensated by introducing a noise r_k (supposed Gaussian and white) in the parameter equation [9, 18]. The importance of the parameter time evolution depends on the standard deviation σ_q of this noise.

An explicit finite-difference scheme [23] is used for prediction calculations. The whole state vector is composed by the temperatures of space grid nodes and the heat flux density.

3. Results analysis

Despite the complexity of its formulation based on a statistical approach, the Kalman filter leads to a satisfying reconstruction of the surface heat flux density. In order to analyse the feasibility of the inversion, we have carried out a numerical simulation where the noisy measured temperatures have been simulated by introducing a random error to the exact temperatures. We have shown that the Kalman filter can adapt to nonlinear problems and provides a solution that remains stable in presence of noisy data. We have also studied the influence of the measurement location (*figure 4*), the standard deviation of the model error (*figure 2*) and the inverse time step (*figure 5*) on the estimation result.

Then, an experimental application has been carried out in order to analyse the behaviour of the filter in presence of real noisy measurements. The sketch of the set-up is presented on *figure 7*. The surface heat flux comes from an incandescent lamp which radiation is concentrated to the cylinder surface by one or several reflections on two parabolic mirrors. Measured temperatures given by the four thermocouples (*figure 8*) are recorded with a rate of 20 readings·s⁻¹ for a lamp heat power of 1656 W, that is, 66.24 W·cm⁻².

The inverse method proposed by Raynaud and Bransier [5, 12] has been chosen to validate the results provided by the Kalman filter. The superposition of the heat flux densities, estimated by the two methods, is satisfying but shows a time-lag dependent on the measurement location (*figure 11*) and on the standard deviation σ_q (*figure 12*). To avoid this lag, Scarpa and Milano [9] introduced future time measurements in the Kalman algorithm to resolve a linear problem. The extension of this technique to nonlinear problems would be interesting but rather complex. The Kalman filter offers the possibility to handle informations coming simultaneously from several sensors and provides, in addition of the estimated state, the variance of the estimation error. This allowed us to represent confidence bounds of the estimated heat flux density.